

מתוך ספר העמוד בני גורן כו 806

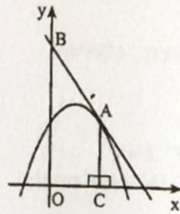
סידור מכתב

481/4,5
 482/8,12
 483/13
 485/1,2
 486/5,9
 487/1
 488/3
 489/8,12

סידור מכתב

265/4	266/8
272/7	275/7
276/10	280/8
282/6	283/12
289/8	290/11
293/9	294/11
296/6	297/7
303/8	304/15
305/21	311/3
312/10	316/7
317/11	318/16
321/7	322/9
323/2	324/8
325/10	326/17
330/3	331/9
332/11	333/18
336/5	337/9
339/3	340/7

חשבון דיפרנציאלי – פולינומים (5 יחידות)



1. לגרף הפונקציה $y = -x^2 + 2x + 3$ מעבירים משיק בנקודה $A(2;3)$. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה B . מנקודה A מורידים אנך AC לציר ה- x . חשב את שטח הטרפז $ABOC$ (O - ראשית הצירים).

תשובה: 10.

2. הישר $y = 2x + 4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 8x + c$. מצא את ערכו של c .

תשובה: 13.

3. לגרף הפונקציה $y = x^4 - 16x + 2a$ מעבירים משיק בנקודה שבה $y = 4$. שיפוע המשיק הוא 16. מצא את הפרמטר a .

תשובה: 10.

4. הנקודות A ו- B נמצאות על גרף הפונקציה $y = x^3 - 7x + 1$, כך ששיעור ה- x בנקודה A גדול ב-4 משיעור ה- x בנקודה B . ידוע כי המשיקים לפונקציה בנקודות A ו- B מקבילים זה לזה. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .

תשובה: $B(-2;7)$, $A(2;-5)$.

5. נתונה פונקציה $y = x^2 - 5x + 11$ ונתונה נקודה $(0;-5)$ הנמצאת מחוץ לגרף הפונקציה. דרך הנקודה הנתונה מעבירים משיקים לפונקציה הנתונה. מצא את נקודות ההשקה ואת משוואות המשיקים.

תשובה: $(4;7)$, $y = 3x - 5$; $(-4;47)$, $y = -13x - 5$.

6. גרף הפונקציה $y = 2x^2 - ax + 8$ ($a > 0$) משיק לציר ה- x . מצא את a ואת שיעורי נקודת ההשקה.

תשובה: $a = 8$, $(2;0)$.

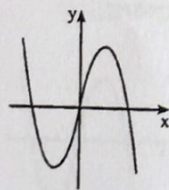
- חקור את הפונקציות הבאות על פי הסעיפים הבאים ומצא:
א. תחום הגדרה. ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט את גרף הפונקציה.

$$y = x^4 - 18x^2 + 32 \quad .8 \quad y = x(12 - x^2) \quad .7$$

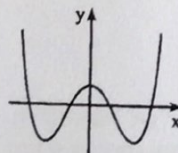
9. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 63x + 49$.
א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ב. הראה שאחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא $(1;0)$.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. כמה נקודות משותפות יש לגרף הפונקציה ולציר ה- x ?

10. חקור את הפונקציה $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ ומצא: א. תחום הגדרה. ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
11. נתונה הפונקציה $y = x^4 - 4x^2$. א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים. ב. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה. ג. מצא לאילו ערכים של k , הפונקציה חותכת את הישר $y = k$: (1) ב-4 נקודות. (2) ב-3 נקודות. (3) ב-2 נקודות. (4) באף נקודה.
12. לפונקציה $f(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + mx + 10$ יש נקודת קיצון ב- $x = 1$. א. מצא את m . ב. מצא את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה, ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה. ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) - 13 = 0$.
13. גרף הפונקציה $y = x^2 - (a+7)x + 4a + 12$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות ($a > 1$). שיפוע המשיק לגרף בנקודת החיתוך הימנית מבין השתיים שווה ל-9. מצא את a .
14. נתונה הפונקציה $y = -x^3 + 3ax$, $a > 0$. א. מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים (במידת הצורך, הבע תשובותיך באמצעות a). ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה. ג. לאילו ערכים של k חותך הישר $y = k$ את גרף הפונקציה (הבע באמצעות a): (1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) בשלוש נקודות.

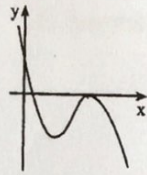
תשובות:



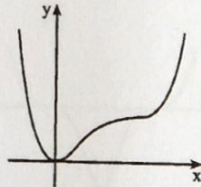
7. א. כל x .
 ב. (2;16) מקסימום, (-2;-16) מינימום.
 ג. עלייה: $-2 < x < 2$,
 ירידה: $x < -2$ או $x > 2$.
 ד. (0;0), (3.464;0), (-3.464;0).



8. א. כל x .
 ב. (3;-49) מינימום, (0;32) מקסימום,
 מינימום (-3;-49).
 ג. עלייה: $x > 3$ או $-3 < x < 0$.
 ירידה: $0 < x < 3$ או $x < -3$.
 ד. (0;32), (4;0), (-4;0), (sqrt(2);0), (-sqrt(2);0).

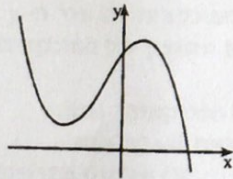


9. א. תחום הגדרה: כל x .
 נקודות קיצון: $(3; -32)$ מינימום,
 $(7; 0)$ מקסימום.
 עלייה: $3 < x < 7$; ירידה: $x < 3$ או $x > 7$.
 נקודת חיתוך: $(0; 49)$.
 ד. בשתי נקודות.



10. א. כל x .
 ב. $(0; 0)$ מינימום.
 ג. עלייה: $x > 0$, ירידה: $x < 0$.
 ד. $(0; 0)$.

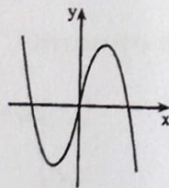
11. א. תחום הגדרה: כל x . נקודות קיצון: $(\sqrt{2}; -4)$ מינימום, $(0; 0)$ מקסימום,
 $(-\sqrt{2}; -4)$ מינימום. נקודות חיתוך: $(-2; 0)$, $(0; 0)$, $(2; 0)$.
 ב. חיוביות: $x > 2$ או $x < -2$, שליליות: $-2 < x < 2$, $x \neq 0$.
 ג. (1) $-4 < k < 0$ (2) $k = 0$ (3) $k > 0$ או $k = -4$ (4) $k < -4$.



12. א. 3.
 ב. $(1; 11\frac{2}{3})$ מקסימום, $(-3; 1)$ מינימום.
 ג. פתרון אחד.

13. 10.

14. א. תחום הגדרה: כל x . נקודות קיצון: $(\sqrt{a}; 2a\sqrt{a})$ מקסימום,
 $(-\sqrt{a}; -2a\sqrt{a})$ מינימום.



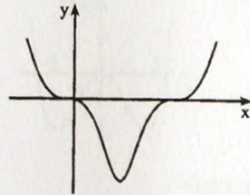
- תחומי עלייה: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$,
 תחומי ירידה: $x > \sqrt{a}$ או $x < -\sqrt{a}$.
 נקודות חיתוך: $(-\sqrt{3a}; 0)$, $(\sqrt{3a}; 0)$, $(0; 0)$.
 ג. (1) $k = 2a\sqrt{a}$ או $k < -2a\sqrt{a}$ (2) $k = 2a\sqrt{a}$ או $k > -2a\sqrt{a}$ (3) $k = -2a\sqrt{a}$ או $-2a\sqrt{a} < k < 2a\sqrt{a}$.

15. הפונקציה $y = x^3 - 15x^2 + 48x - 3$ מוגדרת בקטע $[0, 11]$.
 א. מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה.
 ב. הסבר מדוע גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשלוש נקודות שונות.
 תשובה: א. 41, -67.

16. לגרף הפונקציה $y = (3x-2)^5$ מעבירים שני משיקים ששיפועיהם 15. מצא את משוואות המשיקים.

תשובה: $y = 15x - 6$, $y = 15x - 14$.

17. מצא עבור הפונקציה $y = (x^2 - 6x)^3$:
 א. נקודות מינימום ומקסימום.
 ב. תחומי עלייה וירידה.
 ג. נקודות חיתוך עם הצירים.
 ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



17. א. מינימום. (3; -729).

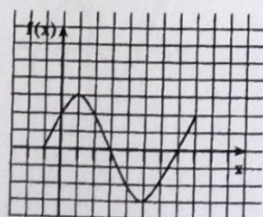
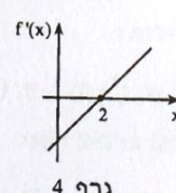
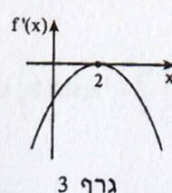
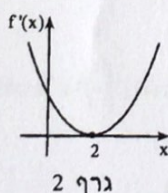
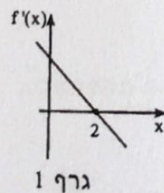
ב. עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 3$.
 ג. א. (0;0), (6;0).

18. לגרף הפונקציה $y = (x-2)^3(6-x)^4$ מעבירים משיק בנקודה $x = 4$. חשב את שיפוע המשיק. ב. מצא את משוואת המשיק.

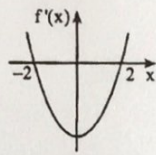
תשובה: א. -64. ב. $y = -64x + 384$.

19. נתונה הפונקציה $f(x) = 10\frac{2}{3}x^3 - 2a^2x + a^2$, $a > 0$.
 א. הבע באמצעות a את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 ב. (1) הבע באמצעות a את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 (2) באיזה רביע נמצאת נקודת המקסימום של הפונקציה? נמק.
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה, כאשר למשוואה $f(x) = 0$ יש:
 (1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.
 ד. היעזר בסעיפים הקודמים ומצא עבור אילו ערכי a למשוואה $f(x) = 0$ יש: (1) שני פתרונות. (2) פתרון אחד. (3) שלושה פתרונות.

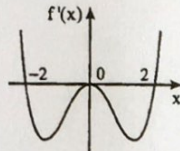
20. לפונקציה $f(x)$ יש רק נקודת קיצון אחת והיא נקודת מקסימום ב- $x = 2$.
 א. מחו הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור $x < 2$.
 ב. איזה מן הגרפים הבאים (1, 2, 3, 4) יכול לתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$? נמק את בחירתך.



21. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-1 \leq x \leq 8$. נתון: $f'(-1) = 4$.
 א. שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $-1 \leq x \leq 8$.
 ב. נתון: $f'(0) = f(0)$. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = 0$.



22. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.
 א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.
 ג. נתון גם: $f(0) = 0$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



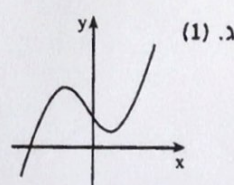
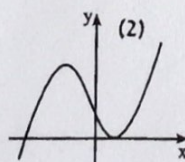
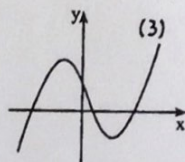
23. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.
 א. מצא את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
 ב. נתון: $f(0) = 0$.
 שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

24. $f(x)$ היא פונקציה שתחום ההגדרה שלה הוא $-3 \leq x \leq 3$.
 לפניך גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 3$.
 א. נתון כי $f'(x)$ היא פונקציה זוגית בתחום $-3 \leq x \leq 3$.
 העתק את השרטוט למחברתך, והשלם את הגרף של $f'(x)$ לכל התחום $-3 \leq x \leq 3$.
 ב. מהם ערכי x עבורם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות?
 ציין היכן יש מינימום והיכן יש מקסימום. נמק.
 ג. נתון: $f(x) > 0$ לכל x בתחום $-3 \leq x \leq 3$, $f(-2) = 1$.
 שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בכל התחום $-3 \leq x \leq 3$.

25. א. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 8x - 24$.
 (1) הוכח שהפונקציה $f(x)$ יורדת לכל ערך של x .
 (2) חשב את $f(-3)$.
 (3) על-פי הסעיפים (1) ו-(2), מצא עבור אילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ שלילית, ועבור אילו ערכי x היא חיובית.
 ב. נתונה הפונקציה $g(x) = -\frac{x^4}{4} - x^3 - 4x^2 - 24x - 7$.
 (1) מצא בעזרת סעיף א' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע אם היא מינימום או מקסימום.
 (2) הסבר מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון נוספות.
 ג. מצא עבור אילו ערכים של k למשוואה $g(x) = k$:
 (1) יש פתרון יחיד. (2) יש שני פתרונות. (3) אין אף פתרון.

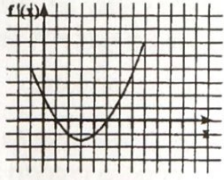
תשובות:

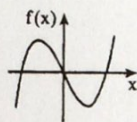
19. א. $(0; a^2)$. ב. (1) $\left(0.25a; a^2 - \frac{a^3}{3}\right)$ מינימום, $\left(-0.25a; a^2 + \frac{a^3}{3}\right)$ מקסימום.
 (2) ברביע השני.



- ד. (1) $a = 3$. (2) $0 < a < 3$. (3) $a > 3$.

20. א. חיובי. ב. גרף 1.

21. א.  ב. $y = 2x + 2$.

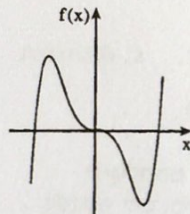


ג.

22. א. עלייה: $x < -2$ או $x > 2$,

ירידה: $-2 < x < 2$.

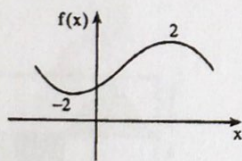
ב. $x = -2$ מקסימום, $x = 2$ מינימום.



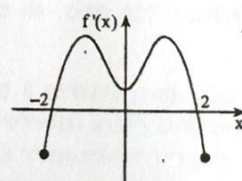
ב.

23. א. עלייה: $x < -2$ או $x > 2$,

ירידה: $-2 < x < 2$.



ג.



24. א.

ב. $x = -2$ מינימום, $x = 2$ מקסימום.

25. א. (2) $f(-3) = 0$ (3) חיובית: $x < -3$, שלילית: $x > -3$.

ב. (1) $(-3; 35.75)$ מקסימום.

ג. (1) $k = 35.75$ (2) $k < 35.75$ (3) $k > 35.75$.

עבודת קיץ – בעיות קיצון (5 יחידות)

1. מבין כל זוגות המספרים החיוביים שסכומם 10, מצא את זוג המספרים שמכפלת ריבועו של האחד בחזקה השלישית של השני היא מקסימלית. מצא גם את המכפלה המקסימלית.

תשובה: 4, 6, 3456.

2. הסכום של שני מספרים הוא a . הוכח כי סכום ריבועיהם המינימלי הוא $\frac{1}{2}a^2$.

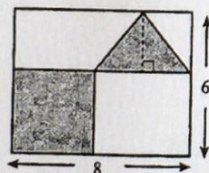
3. x ו- y הם שני מספרים חיוביים שסכומם 1.
א. הוכח: $xy \leq \frac{1}{4}$. ב. $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$.

4. סכומם של שלושה מספרים אי-שליליים הוא 30. נתון כי שניים מהמספרים שווים זה לזה. מצא את שלושת המספרים שמכפלתם: א. מקסימלית. ב. מינימלית.

תשובה: א. 10, 10, 10. ב. 0, 0, 30 או 15, 15, 0.

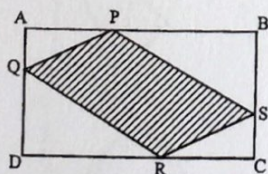
5. חותכים חוט שאורכו 80 ס"מ לשני חלקים. מכל אחד מהחלקים מכינים ריבוע. מה צריך להיות אורך כל אחד מהחלקים, כדי שסכום השטחים של שני הריבועים יהיה מינימלי?

תשובה: 40 ס"מ, 40 ס"מ.



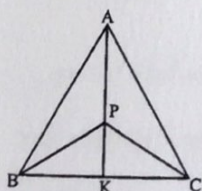
6. בתוך מלבן שאורכו 8 ס"מ ורוחבו 6 ס"מ חסומים ריבוע ומשולש אפורים. מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שהשטח האפור יהיה מינימלי?

תשובה: $2\frac{1}{3}$ ס"מ.



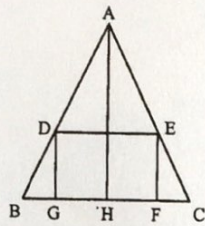
7. נתון מלבן ABCD שממדיו: $AB = 32$ ס"מ, $AD = 24$ ס"מ. על צלעות המלבן מקצים קטעים: $CS = AQ = x$, $AP = CR = 2x$. מצא את שטח המקסימלי של המקבילית PQRS.

תשובה: 400 סמ"ר.



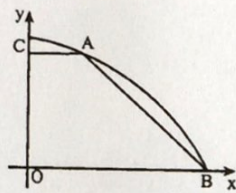
8. במשולש שווה-שוקיים ABC אורך הבסיס BC הוא 4 ס"מ והגובה לבסיס הוא 2 ס"מ. הגובה חותך את הבסיס בנקודה K. נקודה P נמצאת על הגובה לבסיס בין A ל-K. מה צריך להיות אורכו של הקטע PK, כדי שהסכום $(PA)^2 + (PB)^2 + (PC)^2$ של ריבועי מרחקי הנקודה P מקדוקדי המשולש יהיה מינימלי?

תשובה: $\frac{2}{3}$ ס"מ.



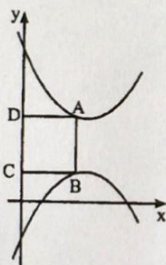
9. במשולש שווה-שוקיים שבסיסו 10 ס"מ ושוקו 13 ס"מ חסום מלבן שאחת מצלעותיו נמצאת על בסיס המשולש ושניים מקדקודיו נמצאים על השוקיים. מה צריך להיות אורך הצלע DE של המלבן, כדי ששטחו של המלבן יהיה מקסימלי?

תשובה: 5 ס"מ.



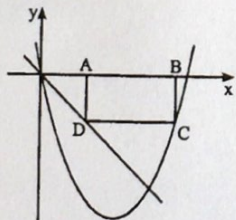
10. נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $y = -x^2 + 81$. ברביע הראשון. הקטע AC מקביל לציר ה-x. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ישר-הזווית ABOC יהיה מקסימלי.

תשובה: (3; 72).



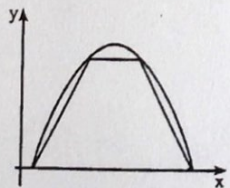
11. נקודה A נמצאת על הפונקציה $y = x^2 - 3x + 9$. ברביע הראשון. נקודה B נמצאת על הפונקציה $y = -x^2 + 3x - 2$. ברביע הראשון. הקטע AB מקביל לציר ה-y. הנקודות C ו-D נמצאות על ציר ה-y כך ש-ABCD מלבן. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי.

תשובה: (1.25; 6.8125).



12. בין גרף הפונקציה $y = x^2 - 6x$, הישר $y = -x$ וציר ה-x חסום ברביע הרביעי מלבן ABCD שצלעו AB מתלכדת עם ציר ה-x (ראה ציור). מה צריכים להיות שיעורי הנקודה B, כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

תשובה: (5.545; -2.524).



13. בין גרף הפרבולה $y = -x^2 + 16x - 28$ לבין ציר ה-x חסום טרפז (ראה ציור). נסמן ב-S את שטח הטרפז. הוכח: $S \leq 256$.

14. א. לאילו ערכים של x המשיקים לגרף הפונקציה $y = -x^3 + 9x^2 - 24x$ יוצרים זווית חדה עם הכיוון החיובי של ציר ה-x. ב. מצא את הזווית החדה הגדולה ביותר שהמשיק לגרף הפונקציה יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

תשובה: א. $2 < x < 4$. ב. 71.57° .