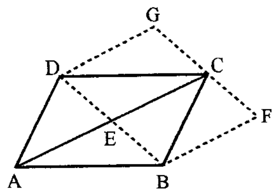
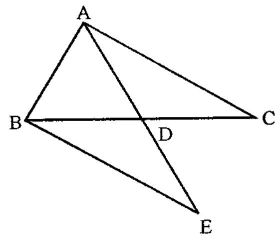
עבודת קיץ – גיאומטריה (4 יחידות)

בעיות עם משולשים ומרובעים (כולל פרופורציה ודמיון)

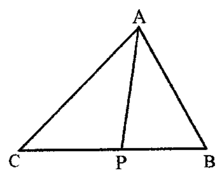
1. המרובעים ABCD ו- BFGD הם מקבילית.
נתון: $CG = CF$ (C על הקטע GF).
א. הוכח: המרובע ECGD הוא מקבילית.
ב. הוכח: אם המקבילית ABCD היא מעוין, אז המרובע ECGD הוא מלבן.



2. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש ABC, כך ש- $\measuredangle ADB < 90^\circ$.
נקודה E נמצאת על המשך הקטע AD כך שמתקיים $AD = DE$, $AC = BE$.
א. הוכח: AD תיכון ל- BC במשולש ABC.
ב. הוכח: $S_{ABD} = S_{BDE}$.

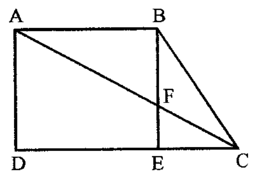


3. בציור שלפניך נתון: $AC =$ 15 ס״מ, $AB =$ 12 ס״מ, $PB =$ 8 ס״מ, $CP =$ 10 ס״מ.
א. הוכח: AP חוצה את הזווית BAC.
ב. הוכח: $\Delta ABP \sim \Delta CBA$.
ג. חשב את אורך הקטע AP.



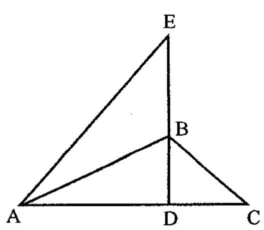
תשובה: ג. 10 ס״מ.

4. לפניך טרפז ישר-זווית ABCD ($AB \parallel DC$, $\measuredangle ADC = 90^\circ$).
BE הוא הגובה לבסיס DC.
האלכסון AC חוצה את הזווית BCD, וחותך את הגובה BE בנקודה F.
נתון: $S_{EFC} =$ 4 סמ״ר, $\frac{BC}{EC} = 2$.
א. חשב את שטח המשולש ABF.
ב. חשב את שטח המלבן ABED.

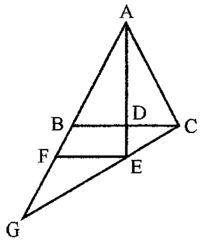


תשובה: א. 16 סמ״ר. ב. 48 סמ״ר.

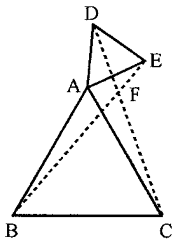
5. במשולש ABC, הגובה לצלע AC הוא BD.
נקודה E נמצאת על המשך הגובה BD, כך ש- AB חוצה את הזווית EAC (ראה ציור).
נתון: $\measuredangle BCA = 2 \cdot \measuredangle BAC$.
א. הוכח: $BC \cdot ED = BD \cdot EA$.
ב. היעזר בנתונים ובסעיף א׳, והוכח: $BC \cdot ED = AD \cdot BE$.



6. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש שווה-שוקיים ABC ‏($AB = AC$).
G היא נקודה על המשך הצלע AB.
הקטע FE מקביל ל- BC.
נתון: $\frac{AG}{AC} = \frac{GF}{BF}$. הוכח: $AE \perp BC$.

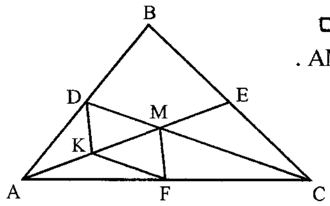


7. המשולשים ABC ו- ADE הם משולשים שווי-צלעות. הקטעים BE ו- CD נחתכים בנקודה F.
א. הוכח: $BE = CD$.
ב. הוכח: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABE$.
ג. חשב את הזווית BFC.

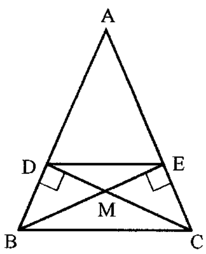


תשובה: ג. 60°.

8. התיכונים AE ו- CD במשולש ABC נפגשים בנקודה M. נקודה K היא אמצע הקטע AM.
F היא נקודה על הצלע AC כך ש- $KF \parallel DC$ (ראה ציור).
א. הוכח: $2KF = MC$.
ב. הוכח: המרובע KDMF הוא מקבילית.

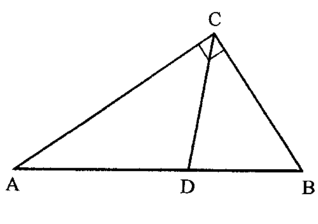


9. במשולש שווה-שוקיים ABC ‏($AB = AC$),
BE ו- CD הם גבהים לשוקיים.
M היא נקודת המפגש בין הגבהים.
א. (1) הוכח כי $BD = EC$.
(2) הוכח כי $DE \parallel BC$.
ב. נתון: $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.
מצא את היחס $\frac{DM}{MC}$.



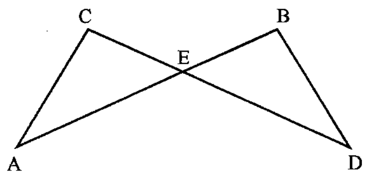
תשובה: ב. $\frac{1}{2}$.

10. במשולש ישר-זווית ACB ‏($\sphericalangle ACB = 90^\circ$)
CD חוצה-זווית ACB (ראה ציור).
א. (1) הוכח: $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$.
(2) נתון: $BC =$ 21 מ"מ , $AC =$ 28 מ"מ.
חשב את האורך של הקטע DB.
ב. מקדקוד C מורידים אנך ליתר AB.
האנך חותך את היתר בנקודה N. הוכח כי $\frac{BC}{AB} = \frac{CN}{AC}$.
ג. חשב את האורך של הקטע DN.



תשובה: א. (2) 15 מ"מ. ג. 2.4 מ"מ.

11. הקטעים AB ו- CD נחתכים בנקודה E. נתון: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.



א. הוכח כי $\Delta AEC \sim \Delta DEB$.

ב. הוכח כי $\Delta AED \sim \Delta CEB$.

ג. נתון גם: $CB \parallel AD$.

הוכח: $\Delta AEC \cong \Delta DEB$

ד. נתון גם: $AC \perp CE$, $\frac{AD}{CB} = \frac{5}{3}$,

$CE = 3$ ס"מ.

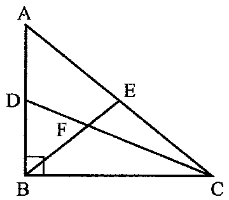
(1) חשב את האורך של ED.

(2) חשב את האורך של AC.

תשובה: ד.(1) 5 ס"מ. (2) 4 ס"מ.

12. משולש ABC הוא משולש ישר-זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$). BE הוא תיכון לצלע AC, ו- CD הוא תיכון לצלע AB.

התיכונים BE ו- CD נחתכים בנקודה F.



א. חשב את היחס $\frac{FB}{AC}$.

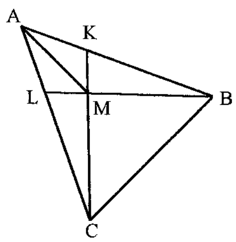
ב. חשב את היחס בין היקף המשולש BFC להיקף המשולש EFD.

ג. נתון גם כי הנקודה M היא אמצע הקטע FC, והנקודה N היא אמצע הקטע FB. הוכח כי המרובע DEMN הוא מקבילית.

תשובה: א. $\frac{1}{3}$. ב. 2.

13. במשולש ABC נתון: $AB = AC$, $AK = AL$.

M היא נקודת המפגש בין הקטעים CK ו- BL.



א. הוכח: (1) $LB = KC$.

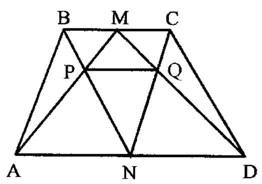
(2) $MK = ML$.

(3) $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MAB$.

ב. נתון: $\frac{CM}{MK} = \frac{7}{3}$. מצא את היחס $\frac{AB}{AL}$.

תשובה: ב. $\frac{7}{3}$.

14. בטרפז ABCD $(BC \parallel AD)$ הנקודות M ו- N הם אמצעי הבסיסים, הקטעים CN ו- DM נחתכים בנקודה Q, הקטעים AM ו- BN נחתכים בנקודה P (ראה ציור).



א. הוכח: $PQ \parallel AD$.

ב. נתון גם: $BC = a$, $AD = 2a$.

הבע באמצעות a את אורך הקטע PQ.

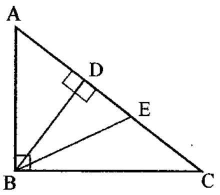
תשובה: ב. $\frac{2}{3}a$.

טריגונומטריה במישור (4 יחידות)

הערה: התרגילים כוללים שימוש בפונקציות סינוס, קוסינוס וטנגנס במשולש ישר-זווית, ושימוש במשפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים.

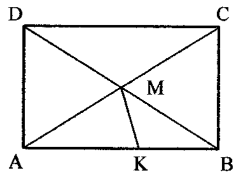
.1 במשולש ישר-זווית ABC נתון: $AB =$ 6 ס״מ, $\sphericalangle ABC = 90^\circ$, $\sphericalangle BAC = \alpha$. BD הוא גובה ליתר. BE הוא חוצה-זווית של $\sphericalangle DBC$.
הבע את אורך הקטע EC באמצעות α.

תשובה: $6\sin\alpha(\tan\alpha - \tan\frac{\alpha}{2})$.



.2 במלבן ABCD נתון: $AB =$ 8.4 ס״מ, $AC =$ 10 ס״מ, $AM = AK$.
חשב את אורך הקטע MK.

תשובה: 2.828 ס״מ.

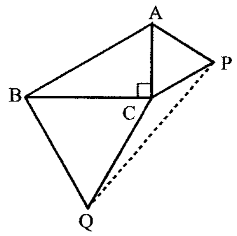


.3 במשולש ABC נתון: $AB =$ 6 ס״מ, $BC =$ 10 ס״מ, $\sphericalangle ACB = 30^\circ$.
חשב את אורך הצלע AC.

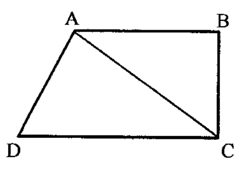
תשובה: 5.344 ס״מ או 11.98 ס״מ.

.4 במשולש ישר-זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$)
נתון: $AB =$ 28.3 ס״מ, $\sphericalangle ABC = 32^\circ$.
על הניצבים AC ו- BC בנו משולשים שווי-צלעות ACP ו- BCQ.
חשב את אורך הקטע PQ.

תשובה: 37.74 ס״מ.

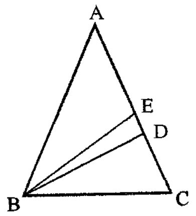


.5 ABCD הוא טרפז ישר-זווית ($AB \parallel CD$, $BC \perp DC$).
נתון: $\sphericalangle ACD = \alpha$, $AC = CD$.
א. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.
ב. חשב את היחס הנ״ל כאשר $\alpha = 60^\circ$.



תשובה: א. $\frac{1}{\cos\alpha}$. ב. 2.

.6 המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
BD הוא הגובה לשוק ו- BE הוא חוצה זווית של $\sphericalangle ABC$. נתון: $\sphericalangle BAC = 2\alpha$ $(\alpha < 30^\circ)$,
$AB = AC = 10$ ס״מ.
א. הבע באמצעות α את שטח המשולש BDE.
ב. הצב $\alpha = 30^\circ$ בביטוי שקיבלת בסעיף א'.
הסבר את התוצאה שקיבלת.

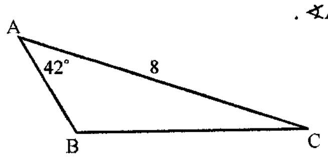


תשובה: א. $50\sin^2 2\alpha \tan(45^\circ - 1\frac{1}{2}\alpha)$. ב. 0.

.7 אורך צלע במשולש הוא 15 ס״מ ואחת הזוויות שלידה היא 68°. אורך חוצה-זווית זו הוא 11 ס״מ. חשב את האורך של שתי הצלעות האחרות.

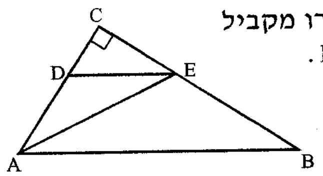
תשובה: 15.26 ס״מ, 11.90 ס״מ.

.8 במשולש ABC נתון: $AC = 8$ ס״מ, $\sphericalangle A = 42^\circ$.
והצלע BC ארוכה ב-5 ס״מ מהצלע AB.
א. חשב את אורך הצלע BC.
ב. BD הוא תיכון לצלע AC.
חשב את שטח המשולש BCD.



תשובה: א. 6.782 ס״מ. ב. 2.385 סמ״ר.

.9 במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90^\circ)$ העבירו מקביל ליתר, החותך את הניצבים בנקודות D ו- E.
נתון: $DE = m$, $\sphericalangle ABE = \alpha$, $\sphericalangle DAE = \alpha$.
הבע באמצעות m ו- α
את אורכי הקטעים AB ו- BE.

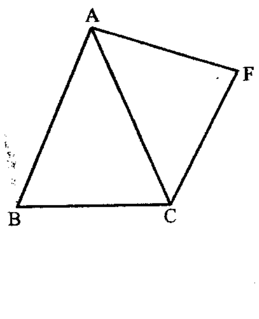


תשובה: $\frac{m\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$, $\frac{m\cos\alpha\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

.10 במשולש ABC נתון: $AB = 2AC$, $\sphericalangle BAC = 120^\circ$.
מצא את גודלן של הזוויות B ו- C.

תשובה: 19.11°, 40.89°.

.11 במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$
בנו על השוק AC משולש שווה-שוקיים AFC
כך ש- $AF = CF = BC = a$.
נסמן: $\sphericalangle ABC = \alpha$, $\sphericalangle AFC = \beta$.
א. (1) הבע את האורך של השוק AC
באמצעות a ו- α.
(2) הוכח כי $\cos\beta = 1 - \frac{1}{8\cos^2\alpha}$.
ב. נתון כי משולש AFC הוא ישר-זווית.
מצא את הזוויות במשולש ABC.



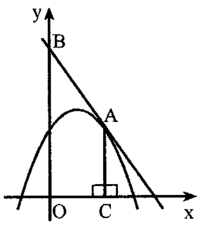
תשובה: א. (1) $\frac{a\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$. ב. 69.295°, 69.295°, 41.41°.

חשבון דיפרנציאלי – פולינומים (4 יחידות)

.1 הישר $y=5$ חותך את הפרבולה $y=x^2+1$ בשתי נקודות.
א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות אלה.
ב. מצא את נקודת החיתוך בין שני המשיקים שמצאת בסעיף א'.

תשובה: א. $y=-4x-3$, $y=4x-3$. ב. $(0;-3)$.

.2 לגרף הפונקציה $y=-x^2+2x+3$ מעבירים משיק בנקודה $A(2;3)$. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה B . מנקודה A מורידים אנך AC לציר ה- x . חשב את שטח הטרפז $ABOC$ (O - ראשית הצירים).



תשובה: 10.

.3 הישר $y=2x+4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^2+8x+c$.
מצא את ערכו של c .

תשובה: 13.

.4 לגרף הפונקציה $y=ax^2+1$ מעבירים משיק בנקודה $x=1$.
א. הבע באמצעות a את משוואת המשיק.
ב. המשיק שמצאת בסעיף א' חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$.
מצא את a .

תשובה: א. $y=2ax+1-a$. ב. $-\frac{1}{3}$.

חקור את הפונקציות הבאות על פי הסעיפים הבאים ומצא:
א. תחום הגדרה. ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה.
ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט את גרף הפונקציה.

.5 $y=x(12-x^2)$ **.6** $y=x^4-18x^2+32$

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=-x^3+15x^2-63x+49$.
א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ב. הראה שאחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא $(1;0)$.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. כמה נקודות משותפות יש לגרף הפונקציה ולציר ה- x ?

.8 חקור את הפונקציה $y=3x^4-8x^3+6x^2$ ומצא: א. תחום הגדרה.
ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה.
ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

9. נתונה הפונקציה $y = x^4 - 4x^2$.

א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים.

ב. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

ג. מצא לאילו ערכים של k , הפונקציה חותכת את הישר $y = k$:

(1) ב- 4 נקודות. **(2)** ב- 3 נקודות . **(3)** ב- 2 נקודות. **(4)** באף נקודה.

10. לפונקציה $f(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + mx + 10$ יש נקודת קיצון ב- $x = 1$.

א. מצא את m .

ב. מצא את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה, ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) - 13 = 0$.

תשובות:

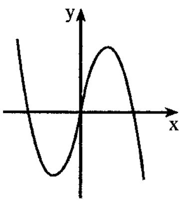
5. א. כל x .

ב. $(2;16)$ מקסימום, $(-2;-16)$ מינימום.

ג. עלייה: $-2 < x < 2$,

ירידה: $x > 2$ או $x < -2$.

ד. $(0;0)$, $(3.464;0)$, $(-3.464.0)$.



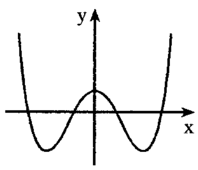
6. א. כל x .

ב. $(3;-49)$ מינימום, $(0;32)$ מקסימום, $(-3;-49)$ מינימום.

ג. עלייה: $x > 3$ או $-3 < x < 0$.

ירידה: $0 < x < 3$ או $x < -3$.

ד. $(0;32)$, $(4;0)$, $(-4;0)$, $(\sqrt{2};0)$, $(-\sqrt{2};0)$.



7. א. תחום הגדרה: כל x .

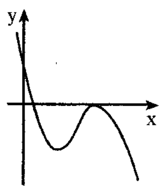
נקודות קיצון: $(3;-32)$ מינימום,

$(7;0)$ מקסימום.

עלייה: $3 < x < 7$; ירידה: $x > 7$ או $x < 3$.

נקודת חיתוך: $(0;49)$.

ד. בשתי נקודות.

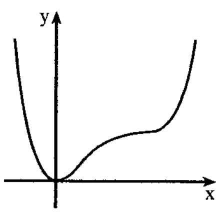


8. א. כל x .

ב. $(0;0)$ מינימום.

ג. עלייה: $x > 0$, ירידה: $x < 0$.

ד. $(0;0)$.



9. א. תחום הגדרה: כל x . נקודות קיצון: $(\sqrt{2};-4)$ מינימום, $(0;0)$ מקסימום, $(-\sqrt{2};-4)$ מינימום. נקודות חיתוך: $(2;0)$, $(0;0)$, $(-2;0)$.

ב. חיוביות: $x > 2$ או $x < -2$, שליליות: $-2 < x < 2$, $x \neq 0$.

ג. **(1)** $-4 < k < 0$. **(2)** $k = 0$. **(3)** $k > 0$ או $k = -4$. **(4)** $k < -4$.

עבודת קיץ – בעיות קיצון (4 יחידות)

1. מבין כל זוגות המספרים שההפרש ביניהם 4, מצא את זוג המספרים שסכום ריבועיהם מינימלי.

תשובה: 2 , 2−.

2. מבין כל זוגות המספרים החיוביים שסכומם 10, מצא את זוג המספרים שמכפלת ריבועו של האחד בחזקה השלישית של השני היא מקסימלית. מצא גם את המכפלה המקסימלית.

תשובה: 4 , 6 , 3456.

3. מבין כל שלשות המספרים החיוביים שסכומם $9a$ $(a>0)$, ושאחד מהם גדול פי שניים מהשני, מצא את המספרים שמכפלתם מקסימלית.

תשובה: $4a$, $2a$, $3a$.

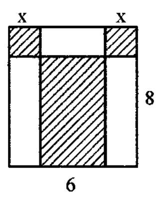
4. חותכים חוט שאורכו 80 ס"מ לשני חלקים. מכל אחד מהחלקים מכינים ריבוע. מה צריך להיות אורך כל אחד מהחלקים, כדי שסכום השטחים של שני הריבועים יהיה מינימלי?

תשובה: 40 ס"מ, 40 ס"מ.

5. סכום אורכי האלכסונים במעוין הוא 6 ס"מ.
מה צריך להיות אורכו של כל אלכסון כדי ששטח המעוין יהיה מקסימלי?

תשובה: 3 ס"מ, 3 ס"מ.

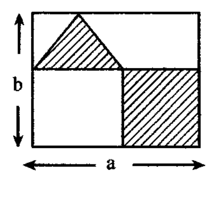
6. בחלון מלבני שממדיו 8 מטרים ו- 6 מטרים רוצים להרכיב זכוכית משני סוגים: בשטחים המקווקווים המורכבים משני ריבועים שצלעם x וממלבן נוסף רוצים להרכיב זכוכית צבעונית, ובשטחים הלבנים שבציור רוצים להרכיב זכוכית שקופה (ראה ציור).



א. מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח הזכוכית השקופה יהיה מקסימלי?
ב. מהו השטח המקסימלי של הזכוכית השקופה?

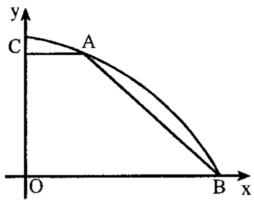
תשובה: א. 2.75 מטר. ב. 30.25 מ"ר.

7. בתוך מלבן שאורכו a ורוחבו b חסומים ריבוע ומשולש מקווקווים.
מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של הריבוע והמשולש יהיה מינימלי? הבע על ידי a ו- b.



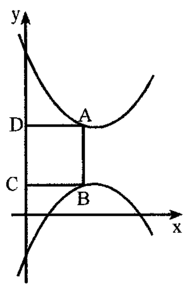
תשובה: $\frac{a+b}{6}$.

.8 נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $y=-x^2+81$ ברביע הראשון. הקטע AC מקביל לציר ה- x. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ישר-הזווית ABOC יהיה מקסימלי.



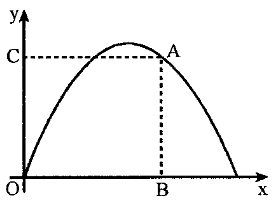
תשובה: $(3;72)$.

.9 נקודה A נמצאת על הפונקציה $y=x^2-3x+9$ ברביע הראשון. נקודה B נמצאת על הפונקציה $y=-x^2+3x-2$ ברביע הראשון. הקטע AB מקביל לציר ה- y. הנקודות C ו- D נמצאת על ציר ה- y כך ש- ABCD מלבן. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי.



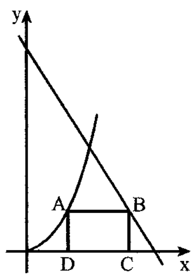
תשובה: $(1.25;6.8125)$.

.10 בנקודה הנמצאת על הפרבולה $y=-x^2+5x$, בקטע $0\le x\le 5$, מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר מלבן ABOC (ראה ציור).
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A :
א. כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?
ב. כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?



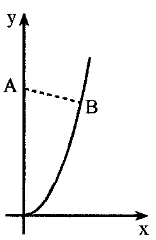
תשובה: א. $(3;6)$. ב. $(0;0)$.

.11 מתבוננים בכל המלבנים ABCD החסומים ברביע הראשון בין גרף הפרבולה $y=x^2$, הישר $y=-2x+14$ וציר ה- x, כמתואר בציור.
א. שיעורי הקדקוד D הם $(x_o;0)$.
הבע את שיעורי הקדקוד A ואת שיעורי הקדקוד B באמצעות x_o.
ב. מהו הערך של x_o במלבן בעל השטח המקסימלי?



תשובה: א. $A(x_0;x_0^2)$, $B\left(\frac{14-x_0^2}{2};x_0^2\right)$. ב. $x_0=2$.

.12 לפניך חלק של הפרבולה שמשוואתה $y=x^2$, הנמצא ברביע הראשון. נתון: $A(0;4\frac{1}{2})$.
א. מצא על הפרבולה את הנקודה B, כך שריבוע המרחק AB הוא מינימלי.
ב. הראה כי המשיק לפרבולה בנקודה B, שאותה מצאת בסעיף א', ניצב לישר AB.



תשובה: א. $(2;4)$.

עבודת קיץ - אי שוויונים (4 יחידות)

תשובות:

.1	$x^2+8x+16\ge 0$	כל x
.2	$x^2-20x+100\le 0$	$x=10$
.3	$4x^2-12x+9<0$	אין פתרון
.4	$9x^2-24x+16\le 0$	$x=1\frac{1}{3}$
.5	$-x^2+10x-25<0$	$x\ne 5$
.6	$-8x^2\le 0$	כל x
.7	$x^2-8x+20<0$	אין פתרון
.8	$x^2-x+6\ge 0$	כל x
.9	$-12<x^2-7x<-10$	$4<x<5$ או $2<x<3$
.10	$x^2-13x\le 30<x^2-7x$	$10<x\le 15$
.11	$3x-14<x^2-12<2x^2-7x$	$x>4$ או $2<x<3$
.12	$\frac{-7}{2x+3}\ge 0$	$x<-1.5$
.13	$\frac{1}{x-2}-1<0$	$x<2$ או $x>3$
.14	$\frac{10}{1-2x}\ge 2$	$-2\le x<\frac{1}{2}$
.15	$\frac{2x-3}{x+2}<1$	$-2<x<5$
.16	$\frac{5x+2}{x+6}\ge\frac{3}{2}$	$x\ge 2$ או $x<-6$
.17	$\frac{x^2-5x+4}{x-6}>0$	$x>6$ או $1<x<4$